

## 8 SISTEMI DI RIFERIMENTO E TRASFORMAZIONI FRA SISTEMI DI RIFERIMENTO

### 8.1 PREMESSA

In generale, un *sistema di riferimento* (SR) è inteso come un insieme di regole e misure per la determinazione della posizione spazio-temporale di un qualsiasi punto sulla superficie terrestre; pertanto, ci permette di rispondere ai quesiti del tipo “*dove si trova un punto?*”, “*quando è avvenuto un evento?*”

Esigenze storiche e strumentali, nonché differenti campi applicativi, hanno portato alla definizione di differenti SR per georeferenziare punti e temporeferenziare eventi. Infatti, a seconda degli assi e dei piani fondamentali scelti come riferimento, si hanno diversi sistemi di riferimento, raggruppabili in due categorie: SR fissi o quasi “inerziali” (moti relativi tra gli astri; orbite satelliti) e SR solidali con la Terra (punti a terra, stazioni di controllo), questi ultimi a loro volta distinti in geocentrici (globali) e locali.

La *temporeferenziazione* tiene conto sia dei fenomeni periodici che di quelli non periodici. In particolare, quelli periodici sono riconducibili:

1. alle maree oceaniche, che generano oscillazioni della distribuzione delle acque dovute all’attrazione gravitazionale di Sole e Luna, a variano da pochi decimetri a diversi metri;
2. alle maree terrestri, che causano oscillazioni della distribuzione delle masse solide dovute all’attrazione gravitazionale di Sole e Luna, dell’ordine di alcuni decimetri;
3. al carico oceanico e atmosferico e alle deformazioni della crosta terrestre, dovute alle oscillazioni di massa oceanica e atmosferica dell’ordine di alcuni centimetri.

Periodi fondamentali dei precedenti fenomeni sono i sottomultipli dei periodi di orbita relativa di Sole e Luna rispetto a un osservatore solidale alla Terra.

Quelli non periodici, invece, sono dovuti al moto orizzontale (tettonica delle placche pari a 2-3 cm/anno) e al moto verticale (teoria dell’isostasia, fino a 40 cm/anno) della crosta terrestre.

L’operazione con cui si esprime la posizione di un punto o di un oggetto qualsiasi, mediante opportune coordinate in un assegnato datum, prende il nome di *georeferenziazione*. Questa consiste nel determinare la stima della *posizione spaziale* di un oggetto o di un fenomeno, definita da un set di

coordinate di affidabilità nota in un assegnato sistema di riferimento. In generale, i problemi base della georeferenziazione sono sia la determinazione di *posizione*, sia la valutazione della relativa *affidabilità*.

Tuttavia, la posizione assoluta di un qualsiasi punto sulla superficie terrestre (superficie topografica) è individuata da un sistema di assi cartesiani nello spazio, opportunamente orientati e con origine nel centro di massa della Terra.

Non essendo possibile istituire tale sistema direttamente sulla superficie terrestre, date le innumerevoli irregolarità, si assume una superficie di riferimento esprimibile analiticamente denominata superficie matematica o geometrica della Terra. Infatti, poiché la Terra ha una forma molto irregolare e non è possibile rappresentarla in forma analitica semplice, pertanto, in passato i geodeti si sono occupati di verificare l'esistenza di una superficie di riferimento che fosse semplice e matematicamente definita.

A partire dallo sferoide (densità assunta costante) si è giunti all'ellissoide ipotizzando una densità costante e simmetrica rispetto all'asse di rotazione terrestre (cfr. Cap. UU - Geodesia).

Un generico ellissoide di parametri geometrici noti (semiasse maggiore e schiacciamento) ed orientato localmente in un dato punto (*punto di emanazione*) definisce un *datum geodetico* che, pur essendo tridimensionale, è utilizzato prevalentemente per la planimetria (*horizontal datum*).

In particolare, un datum geodetico è definito come un sistema di riferimento che consente di individuare la posizione di punti sulla superficie fisica della Terra attraverso formulazioni matematiche. Tale definizione, pur risultando del tutto convenzionale, è stabilita da una serie di punti, opportunamente materializzati sulla superficie terrestre, ai quali vengono attribuiti determinati valori delle coordinate.

Per l'altimetria, invece, è richiesta la definizione di un datum ulteriore denominato *vertical datum*, basato sull'individuazione di un punto al quale convenzionalmente si assegna la quota zero (mareografo). In corrispondenza del mareografo c'è il caposaldo fondamentale da cui ha origine la rete di livellazione che materializza sul territorio il vertical datum con caposaldi (punti di quota ortometrica nota).

L'orientamento si realizza imponendo che, nel punto indicato, si verificino le seguenti condizioni geometriche:

1. la normale ellissoidica coincida con la verticale;
2. la direzione del meridiano ellissoidico coincida con quella del meridiano astronomico;
3. la quota ellissoidica coincida con quella ortometrica.

Un ellissoide orientato approssima (planimetricamente) la superficie geoidica in un intorno molto vasto del punto di emanazione, fino alle dimensioni di uno Stato o anche di una porzione di continente (fig. 8.1).

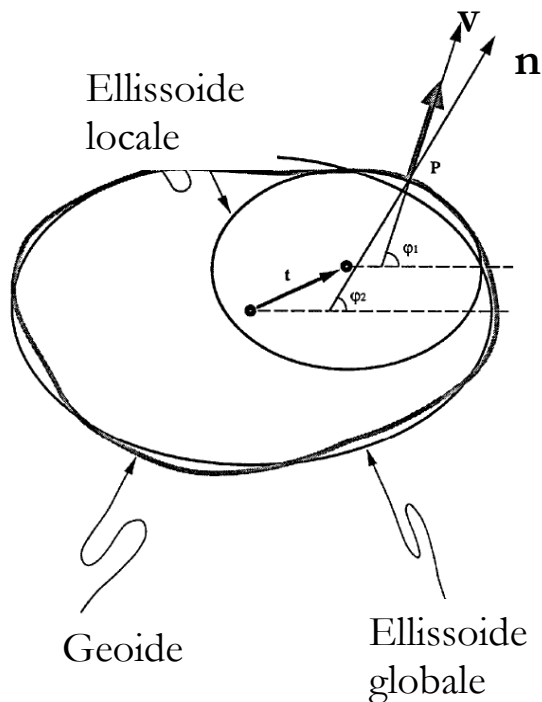


Figura 8.1 - Geoide, ellissoide locale ed ellissoide globale<sup>1</sup>

Definito un SR, la posizione di un punto  $P$  in esso può essere espressa mediante diversi sistemi di coordinate (coordinate cartesiane geocentriche e coordinate geodetiche), questo comporta l'esistenza di differenti SR in funzione delle differenti tipologie di osservazioni. Ad esempio, per osservazioni puramente geometriche (angoli) si adotta un SR con coordinate cartesiane, mentre per osservazioni gravimetriche (zenith di un punto) il SR è di coordinate "natural" o "intrinseche".

<sup>1</sup> Beutler G, Brockmann E, Dach R, Fidez R, Gurtner W, Hugentobler U, Jonson J, Mervart L, Rothacher M, Schacer S, Springer T, Weber R (2000) Documentation of the Bernese GPS software Version 4.2. Part I. Astronomical Institute, University of Berne, Svizzera.

Un altro aspetto che porta all'assunzione di diversi SR, oltre alle molteplici applicazioni, è la differente scala plano-altimetrica, dovuta alla variazione di gravità tra polo Nord ed equatore.

In generale, distinguiamo:

- a) SR *globali*, definiti e coerenti su scala planetaria, realizzati mediante reti globali di stazioni permanenti che utilizzano metodi della geodesia satellitare (VLBI, SLR e, di recente, GNSS) per stimare la propria posizione e il proprio spostamento nel tempo.
- b) SR *locali*, orientati e definiti su scala locale mediante reti locali, regionali, nazionali (per l'Italia Roma40), continentali (per l'Europa: ED50) di punti fondamentali planimetrici e altimetrici, la cui posizione relativa viene stimata mediante misure di angoli, distanze e dislivelli.

I SR globali costituiscono, per le metodologie di misura e la precisione delle stime, lo stato dell'arte. I SR locali, invece, hanno valenza storica poiché vennero realizzati prima dell'avvento della geodesia da satellite, ricorrendo a metodologie di misura e di stima meno precise di quelle oggi disponibili. Hanno però importanza fondamentale poiché spesso costituiscono il riferimento ufficiale cartografico per il territorio cui si riferiscono.

La realizzazione del SR avviene mediante osservazioni fisiche e geometriche (campo di gravità, distanze, angoli), al suolo e dallo spazio (livellazioni, osservazioni a stelle fisse).

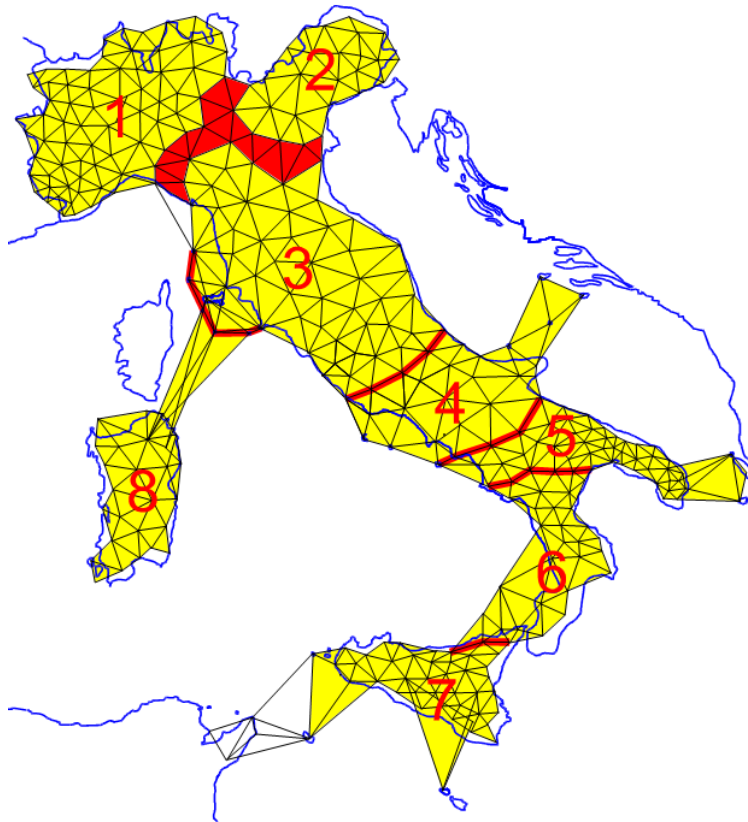
Per realizzare un SR si deve fornire un catalogo di punti fondamentali di coordinate stimate coerenti con la definizione del SR, rispetto ai quali determinare la posizione di nuovi punti.

Poiché ogni realizzazione di un SR dipende dalle osservazioni utilizzate, realizzazioni diverse della stessa definizione di SR possono differire fra loro.

## 8.2 SISTEMI GEODETICO-CARTOGRAFICI IN ITALIA

Il sistema geodetico di riferimento adottato in Italia prima del 1940 era l'ellissoide di Bessel (1841), caratterizzato da un semiasse maggiore  $a = 6377397,155 \text{ m}$  ed eccentricità  $e = 1/299,1528128$ . L'orientamento era a Genova IIM (1902) con origine ( $\varphi = 44^\circ 25' 08,235$ ;  $\lambda = 0^\circ$ ) ed azimuth su Monte del Telegrafo  $\alpha = 117^\circ 31' 08'', 910$ .

La sua realizzazione sul territorio nazionale era attuata attraverso la rete fondamentale di primo ordine, dimensionata su otto basi e calcolata in otto blocchi (fig. 8.2).



*Figura 8.2 – Sistema geodetico italiano ante 1940*

Quanto alla rappresentazione cartografica adottata, ci si riferiva alla proiezione policentrica naturale (o di Flamsteed modificata) riferita al centro di ciascuno degli elementi cartografici in scala 1:100.000.

Ad oggi, in Italia si utilizzano differenti datum geodetico-cartografici, quali il ROMA 40 (anche se obsoleto), l'ED50 e il WGS84, di seguito descritti.

### **8.2.1 Sistemi geodetico-cartografici locali**

Il sistema geodetico nazionale (locale) è denominato Roma 40 o M. Mario 1940 e fa riferimento all'ellissoide internazionale (Hayford) orientato a Roma M. Mario con dati astronomici del 1940, con precisioni elevate localmente. Il meridiano fondamentale è quello passante per M. Mario, mentre la rete geodetica associata è quella di triangolazione dell'IGM (Istituto Geografico Militare) distinta in I, II, III e IV ordine (fig. 8.3) e successivi raffittimenti.



Figura 8.3 – Rete geodetica di triangolazione dell'IGM, Roma40

Quanto alla rappresentazione cartografica, si fa riferimento alla rappresentazione conforme di Gauss, in cui l'intero territorio nazionale è compreso in due fusi, Ovest ed Est, di  $6^{\circ}30'$  di ampiezza con fattore di contrazione  $m_0 = 0,9996$  e falsa origine per le coordinate Est pari a 1500 km e 2520 km, rispettivamente, per il fuso Ovest ed il fuso Est.

Ormai in disuso, è stato adottato per la cartografia nazionale e regionale (coordinate piane Gauss-Boaga) e per la cartografia catastale limitatamente ad alcune province.

A livello internazionale, il sistema geodetico ED50 (European Datum 1950), di tipo locale, ha assunto quale superficie di riferimento l'ellissoide internazionale (Hayford) con orientamento medio europeo a Potsdam in Germania (fig. 8.4).

Il meridiano fondamentale è quello di Greenwich. Non ha una propria realizzazione, ma la rete associata deriva da una selezione di catene di triangoli estratte dalle reti di primo ordine dei singoli stati e compensate in blocco a livello europeo occidentale (fig. 8.5).

Il calcolo della compensazione è stato eseguito nel 1950 dall'A.M.S. (*Army Map Service*). È utilizzato per la definizione delle coordinate piane UTM-ED50 (*Universal Transverse Mercator*) e per il taglio (suddivisione in fogli) della cartografia IGM di nuova produzione e di quella regionale.

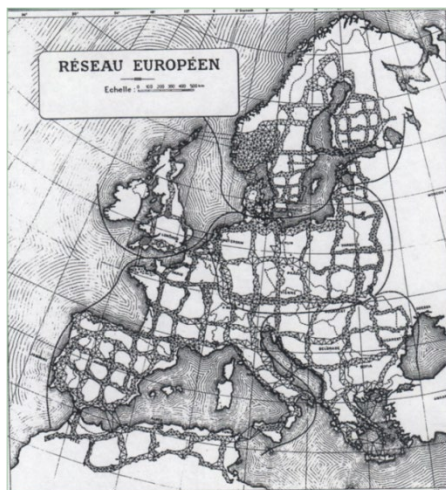


Figura 8.4 – Rete geodetica di triangolazione europea, ED50

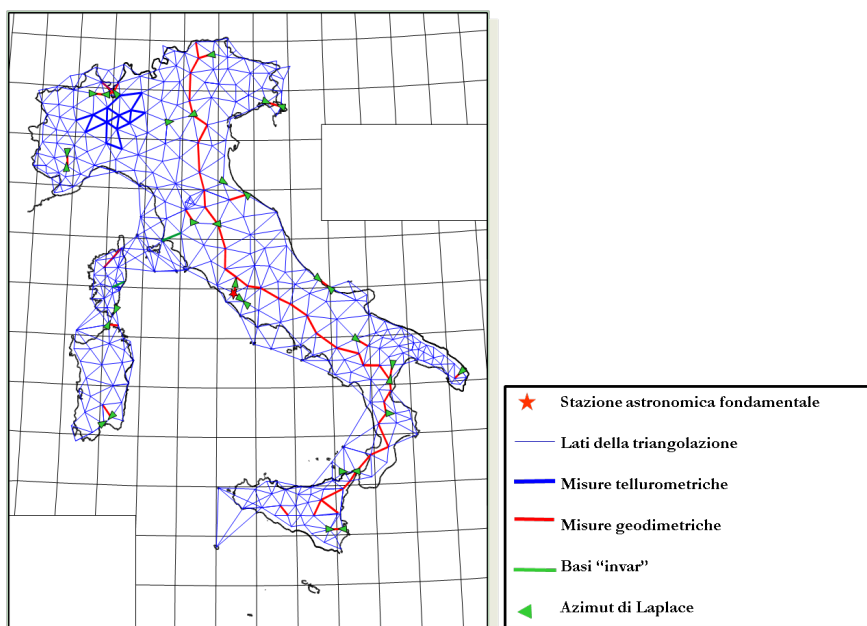


Figura 8.5 – Rete geodetica IGM83

Quanto alla rappresentazione cartografica, infatti, si fa riferimento alla rappresentazione conforme di Gauss, in cui l'intero territorio nazionale è compreso in tre fusi, 32, 33 e 34, di  $6^\circ$  di ampiezza con fattore di contrazione  $m_0 = 0,9996$  e falsa origine per le coordinate Est pari a 500 km, identica per tutti i 60 fusi.

Una precisazione merita il(i) sistema(i) di riferimento catastale che adotta come datum di riferimento l'ellissoide di Bessel (1841), caratterizzato da un semiasse maggiore  $a = 6.377.397,155 \text{ m}$  ed eccentricità  $e = 1/299,1528128$ . L'orientamento è a Genova IIM (1902) con origine ( $\varphi = 44^\circ 25' 08''$ ,  $235$ ;  $\lambda = 0^\circ$ ) e d azimuth su Monte del Telegrafo  $\alpha = 117^\circ 31' 08''$ ,  $910$ . La sua realizzazione è la rete di inquadramento costituita dalla triangolazione dell'IGM (limitatamente ai vertici di I, II e III ordine), raffittita con la triangolazione catastale di rete, sottorete e dettaglio. La rappresentazione cartografica, invece, è la rappresentazione equivalente Cassini-Soldner, con suddivisione del territorio nazionale in zone, riferita ciascuna ad una diversa origine (*centro di sviluppo*), coincidente in molti casi con un vertice IGM (fig. 8.6).



Figura 8.6 – Mappa suddivisione dell'Italia nei differenti sistemi Cassini Soldner



### 8.2.2 Sistema geodetico-cartografico globale

Il sistema geodetico cartesiano WGS84 (*World Geodetic System*, 1984), di tipo globale, costruito sulla base delle misure e delle conoscenze scientifiche disponibili al 1984, è materializzato dalla rete IGM95 e costituisce un modello matematico della Terra da un punto di vista geometrico, geodetico e gravitazionale. È definito come una realizzazione di un sistema di riferimento convenzionale terrestre (cfr. 8.3.3).

## 8.3 SISTEMI GEODETTICI GLOBALI

Il SR convenzionale celeste (*Conventional Celestial Reference System*, CCRS) è fisso ed è individuato dall'equatore celeste e dal punto equinoziale; la terna cartesiana associata (X, Y, Z) ha l'asse Z con origine nel baricentro terrestre ed ortogonale all'equatore celeste di riferimento, l'asse X passante per il punto equinoziale di riferimento ed asse Y a completamento della terna destrorsa (fig. 8.7).

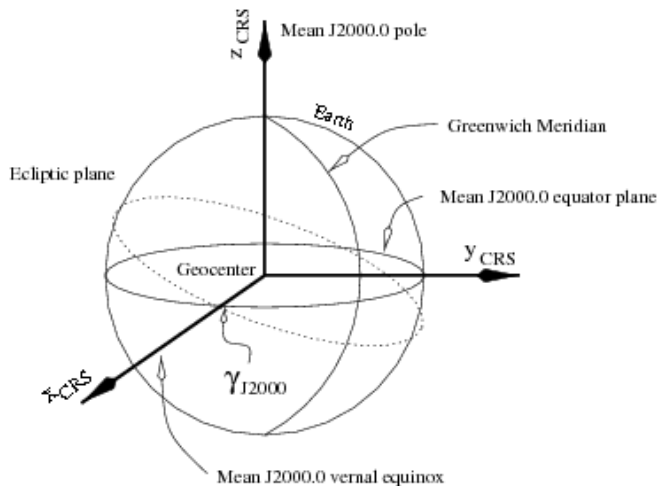


Figura 8.7 – CCRS, *Conventional Celestial Reference System*<sup>2</sup>

### 8.3.1 ITRS (International Terrestrial Reference System)

I SR terrestri di tipo globale, definiti e coerenti su scala planetaria, sono realizzati mediante reti globali di stazioni permanenti.

Il SR convenzionale terrestre (ITRS, *International Terrestrial Reference System*) è definito da un'origine nel centro di massa convenzionale della Terra,

<sup>2</sup> [http://www.navipedia.net/index.php/Conventional\\_Celestial\\_Reference\\_System](http://www.navipedia.net/index.php/Conventional_Celestial_Reference_System)

l'asse Z passante per il Polo Convenzionale Terrestre (BIH 1984), l'asse X definito dall'intersezione fra piano meridiano di riferimento (piano meridiano passante per il punto fondamentale di Greenwich, BIH 1984) e piano equatoriale terrestre (BIH 1984) e l'asse Y tale da completare la terna destrorsa (fig. 8.8).

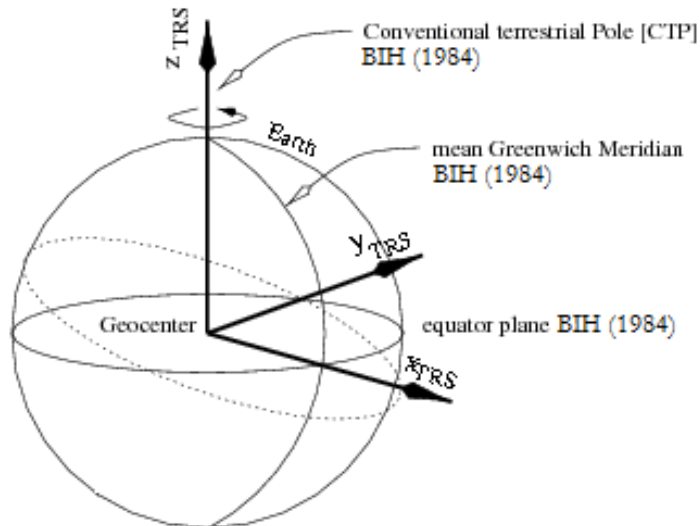


Figura 8.8 – ITRS (International Terrestrial Reference System)<sup>3</sup>

L'ITRS, caratterizzato da una precisione centimetrica, è realizzato tramite reti globali di stazioni permanenti (fig. 8.9) materializzate in modo stabile, che operano in continuo nel tempo, adottando sostanzialmente quattro metodi affini (ma non uguali) di osservazione: VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*), SLR (*Satellite Laser Ranging*), GNSS e DORIS (*Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite*).

In particolare, le stazioni VLBI, realizzate mediante appositi radiotelescopi, sono circa 30 (fig. 8.10) ed effettuano contemporaneamente misure a quasar; le osservazioni derivate sono gli angoli di osservazione dalle singole stazioni e le differenze di distanza dai quasar alle stazioni.

<sup>3</sup> [http://www.navipedia.net/index.php/Conventional\\_Terrestrial\\_Reference\\_System](http://www.navipedia.net/index.php/Conventional_Terrestrial_Reference_System)

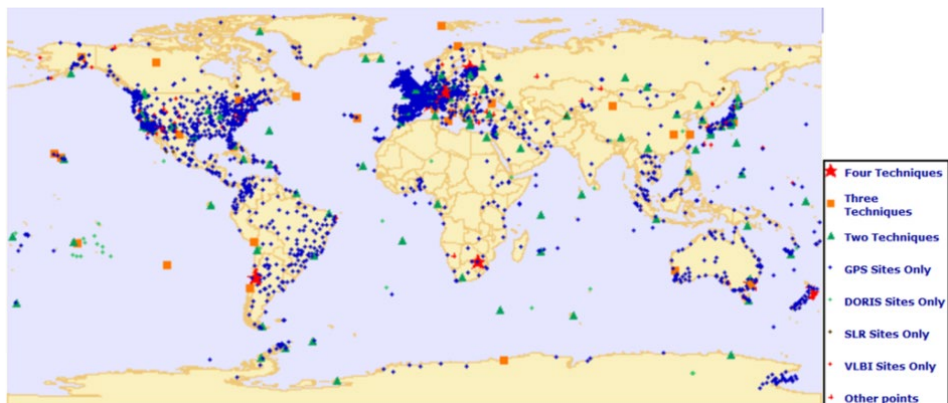


Figura 8.9 – Realizzazione ITRS<sup>4</sup>



Figura 8.10 – VLBI World map<sup>5</sup>

L'acquisizione dei dati è controllata dai Centri di funzionamento; quanto ai dati grezzi ed ai log file, questi sono trasmessi ai correlatori per

<sup>4</sup> <http://itrf.ensg.ign.fr/GIS/>

<sup>5</sup> [http://ivs.nict.go.jp/mirror/old/vlbi\\_world\\_map\\_fullsize.gif](http://ivs.nict.go.jp/mirror/old/vlbi_world_map_fullsize.gif)

l'elaborazione. I dettagli delle sessioni previste sono pubblicati nei *master file* gestiti dal Centro di Coordinamento. Le circa 90 stazioni SLR attive nel pianeta (fig. 8.11), invece, sono realizzate mediante cannoni laser orientabili. Le singole stazioni effettuano misure istantanee sui tempi di andata e ritorno del fascio laser dal cannone a satelliti artificiali in orbita geocentrica equipaggiati con riflettori speciali. Le misure, con precisioni millimetriche, possono essere accumulati per fornire orbite precise e una serie di prodotti scientifici importanti.

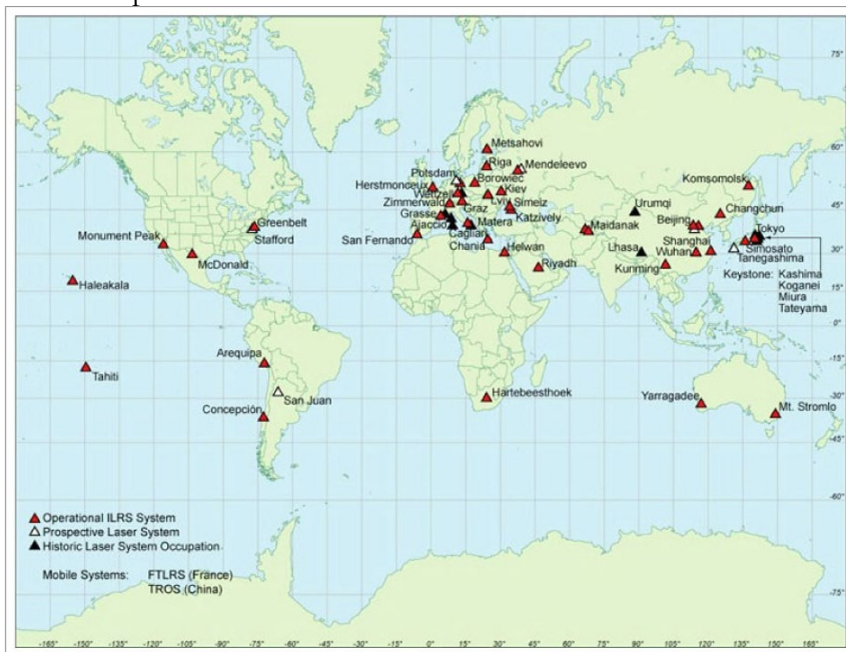


Figura 8.11 – SLR World map<sup>6</sup>

Generalmente, un satellite è all'interno della linea di vista di diverse stazioni reflex che possono funzionare contemporaneamente in modo tale da "triangolare" su uno stesso satellite, ottenendo maggiori accuratezze sia nella determinazione della posizione del satellite che delle stazioni a terra. Quanto alle 365 stazioni GNSS (fig. 8.12), queste sono realizzate mediante ricevitori GNSS operanti 24 ore su 24 che effettuano osservazioni di pseudorange ai satelliti della costellazione GNSS.

<sup>6</sup> <http://www.scielo.org.za/img/revistas/sajs/v108n3-4/10f02.jpg>



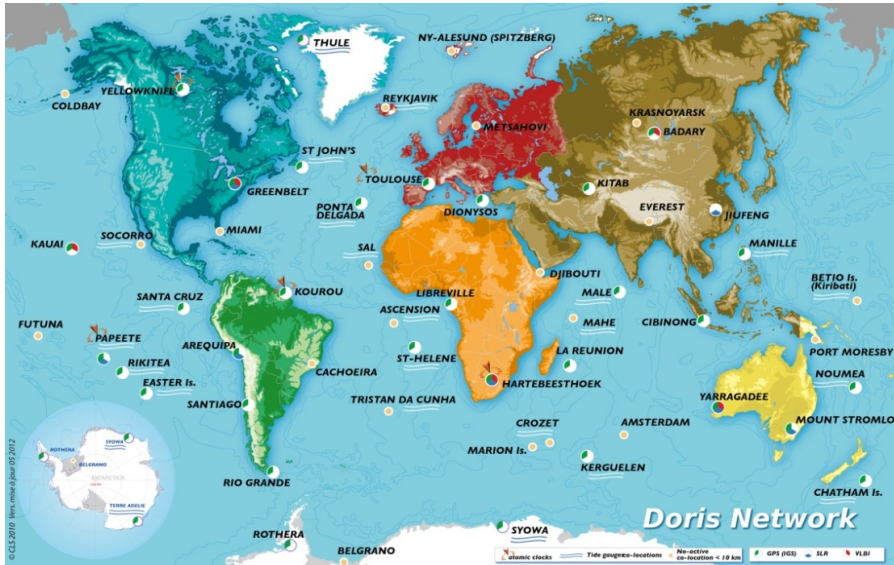


Figura 8.13 – Rete a terra di stazioni permanenti Doris nel 2012<sup>8</sup>

Una realizzazione dell'ITRS (*International Terrestrial Reference Frame*) consiste nel catalogo delle coordinate delle stazioni permanenti che hanno contribuito alla soluzione. Poiché il numero di stazioni permanenti (VLBI, SLR, GNSS) aumentano e gli algoritmi di calcolo si evolvono, nel tempo le stime di ITRF (ovvero i cataloghi) si sono evolute ottenendo l'ITRF89, ..., ITRF97, ITRF2000. Per ogni stazione del catalogo sono stimate e fornite la posizione cartesiana geocentrica e la velocità annuale all'epoca di riferimento per la soluzione  $t_i$  (tab. 8.1).

Tabella 8.1 – Posizione e velocità delle stazioni SLR dell'ITRF2000 all'epoca 1997.0

DOMES NB.	SITE NAME	TECH. ID.	X/V <sub>x</sub>	Y/V <sub>y</sub>	Z/V <sub>z</sub>	Sigmas		
12706M001	LAMPEDUSA	SLR 7544	5072831,863 -0,0142	1130886,403 0,1850	3684837,140 0,0114	0,008	0,004	0,007
12711M002	MEDICINA	SLR 7546	4461399,510 -0,0187	919566,924 0,0200	4449510,647 0,0086	0,0016	0,0009	0,0014
12717M001	NOTO	SLR 7543	4934528,876 -0,0173	1321133,360 0,0174	3806522,733 0,0134	0,002	0,001	0,002
12718M002	TRIESTE	SLR 7550	4336738,495 -0,0133	1071270,831 -0,0634	4537911,450 0,0329	0,198	0,161	0,193

<sup>8</sup> <http://www.aviso.oceanobs.com/en/doris/system/ground-beacons.html>

La realizzazioni europea e italiana dell'ITRF89 sono, rispettivamente, l'ETRF89 (*Earth Geopotential Model*, 1989) e l'IGM95; in particolare, l'ETRF89 (fig. 8.14) rappresenta la realizzazione europea dell'ITRF89, mentre l'IGM95 è un raffittimento nazionale di ETRF89 e si compone di circa 1200 caposaldi le cui coordinate sono calcolate e monografate in ETRF89 (fig. 8.15). L'ETRS89 è usato come sistema di coordinate GNSS standard preciso in tutta Europa. Supportato dall'EuroGeographics ed approvato dalla UE, costituisce la “spina dorsale” per tutti i progetti geografici e geodinamici sul territorio europeo sia a livello nazionale che internazionale. L'ETRS89 è materializzato attraverso la rete EUREF (*European Permanent Network*, EPN) di stazioni permanenti, di riferimento a funzionamento continuo di cui sono note le coordinate GNSS e la relativa precisione nel ETRS89.

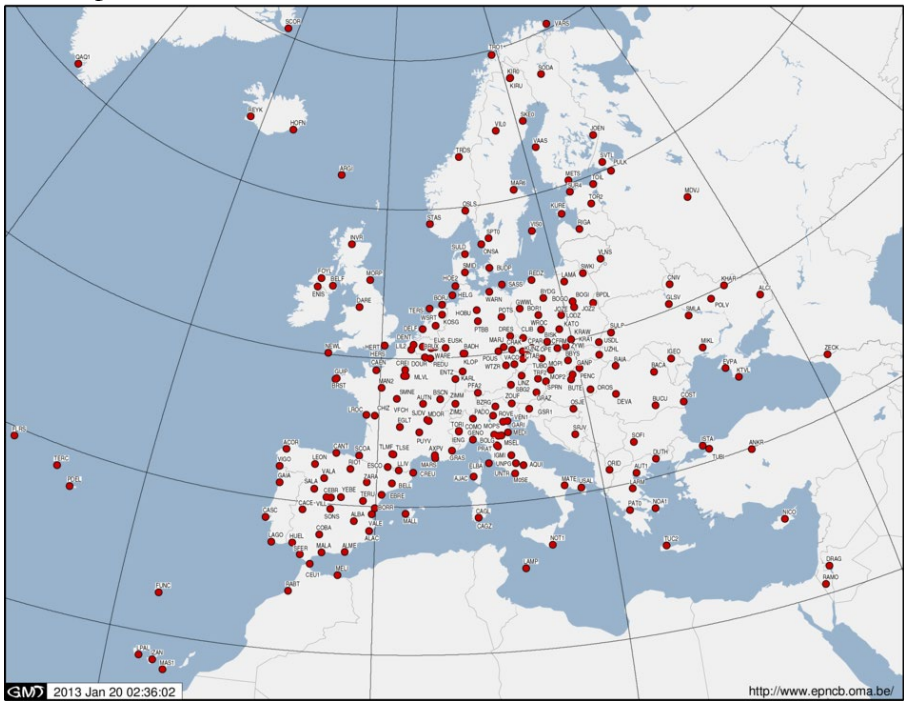


Figura 8.14 – EUREF Permanent Tracking Network<sup>9</sup>

<sup>9</sup> <http://www.epncb.oma.be/>

La rete IGM95, invece, è costituita da stazioni caratterizzate da elevata precisione ed aventi una interdistanza media di circa 20 km. È attualmente in corso un raffittimento, realizzato in collaborazione con le Regioni, che porterà ad una densità media di un punto ogni 7 km.



Figura 8.15 – Rete IGM95<sup>10</sup>

### 8.3.2 RDN (Rete Dinamica Nazionale)

A partire dal sistema di riferimento globale ETRF89 e dall'IGM95, l'IGM ha ufficializzato un nuovo sistema ossia l'ETRF2000 (2008.0), adottato a partire dal gennaio 2009, definito per mezzo di una rete di stazioni permanenti GPS diffuse su tutto il territorio nazionale ovvero costituenti la Rete Dinamica Nazionale (RDN, fig. 8.16), calcolata dal Servizio Geodetico dell'IGM.

---

<sup>10</sup> [http://www.igmi.org/prodotti/elementi\\_geodetici/rete\\_IGM95.php](http://www.igmi.org/prodotti/elementi_geodetici/rete_IGM95.php)





Figura 8.16 – Rete Dinamica Nazionale<sup>11</sup>

L'obiettivo è quello di monitorare in continuo il SR sul territorio nazionale. La rete RDN consta di 99 stazioni omogeneamente distribuite con un'interdistanza media di circa 100-50 km (equivalente ad una densità di 1 stazione/3000 km<sup>2</sup> circa), quasi tutte appartenenti ad Enti Pubblici. Nella scelta delle stazioni sono state incluse quelle appartenenti all'ITRS, all'IGS (Matera, Noto, Medicina, Padova, Torino, Genova, Cagliari e Lampedusa)

<sup>11</sup> [http://87.30.244.175/rdn/rdn\\_download/allegato1.pdf](http://87.30.244.175/rdn/rdn_download/allegato1.pdf)

e all'EUREF. Al fine di avere punti noti anche e soprattutto nelle zone marginali, sono state incluse nella RDN le seguenti stazioni di Sofia, Graz, Wettzel, Zimmerwald e Grasse dell'ITRS, site fuori dal territorio nazionale.

È stata posta attenzione alla stabilità della materializzazioni e dei siti incluse alcune stazioni appartenenti a reti regionali per il posizionamento in tempo reale, in modo da garantire la necessaria uniformità nelle georeferenziazioni a livello nazionale. Il cambio di DATUM ha obbligato ad aggiornare la rete IGM95 ricalcolata su collegamenti a 44 stazioni RDN.

### 8.3.3 Sistema geodetico-cartografico WGS84

Il WGS84 (*World Geodetic System*, 1984), di tipo globale, è stato sviluppato dal Defence Mapping Agency (DMA), ora NIMA (*National Imagery and Mapping Agency*), a partire dagli anni 60. È definito da una terna cartesiana OXYZ con:

1. origine coincidente con il centro di massa della Terra;
2. asse Z passante per il polo convenzionale terrestre (CTP);
3. asse X definito dall'intersezione del piano meridiano, passante per Greenwich, col piano equatoriale terrestre;
4. asse Y, univocamente determinato in modo tale da ottenere una terna destrorsa di assi cartesiani ortogonali (fig. 8.17).

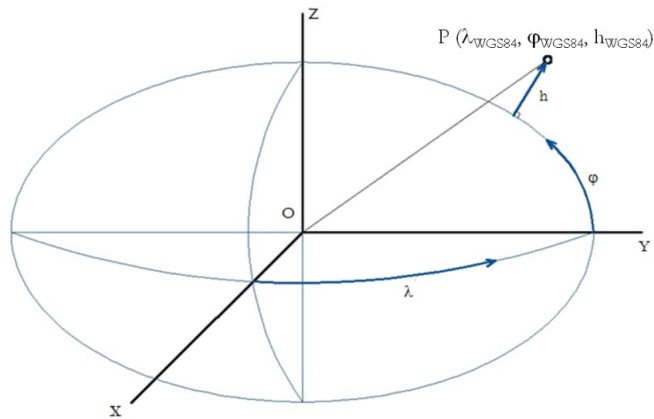


Figura 8.17 – Ellissoide WGS84

Alla terna è associato un ellissoide con centro nell'origine ed assi coincidenti con quelli della terna stessa detto ellissoide geocentrico, con parametri geometrici  $a = 6.378.137 \text{ m}$  ed  $e = 1/298,257223563$ .

È formalmente definito come ITRS, ma è realizzato mediante una rete di stazioni di controllo del NIMA caratterizzate da una precisione decimetrica.

È, comunque, considerato un SR fondamentale, perché è il SR in cui vengono calcolate e fornite all'utenza le orbite dei satelliti GPS. Attualmente, le differenze tra WGS84 (G1150) e ITRF2000 si mantengono al di sotto del centimetro in ciascuna coordinata X, Y e Z.

Al sistema WGS84 non è associato ufficialmente alcun sistema cartografico, ma negli ultimi anni è stato adottato, anche dall'IGM, per la rappresentazione UTM-WGS84, in analogia all'UTM-ED50.

#### 8.4 SISTEMI DI COORDINATE

Definito il datum geodetico, la posizione di un punto può essere individuata mediante differenti sistemi di coordinate, correlati tra di loro attraverso opportune formule di trasformazione.

I sistemi di coordinate più utilizzati sono di seguito elencati:

- *Coordinate geografiche ellissoidiche*  $\varphi$  (latitudine) e  $\lambda$  (longitudine), definiscono la posizione di un punto sulla superficie ellissoidica; alla coppia  $(\varphi, \lambda)$  è associata la *quota ellissoidica*  $h$  in modo tale che la terna  $(\varphi, \lambda, h)$  definisca la posizione tridimensionale di un punto sulla superficie fisica. Le coordinate geografiche sono quelle di impiego più comune, sia per fornire i risultati della compensazione delle reti (di trigonometriche classiche e GPS), sia per individuare i vertici nelle monografie e nei cataloghi, che per i problemi di posizionamento e georeferenziazione in generale.
- *Coordinate cartesiane geocentriche*, rappresentano le coordinate cartesiane di un punto rispetto alla terna d'assi geocentrica  $OXYZ$  (fig. 8.18), definendo la posizione tridimensionale di un punto senza ambiguità.
- *Coordinate piane cartografiche*, definiscono la posizione planimetrica di un punto in una qualsiasi rappresentazione cartografica (cfr. Cap. SS - Cartografia), stabilendo una corrispondenza biunivoca tra ellissoide e piano della carta.

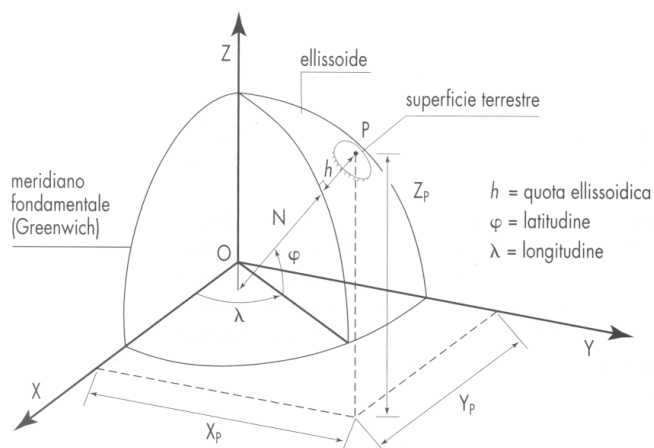


Figura 8.18 – Coordinate geografiche ellissoidiche

## 8.5 TRASFORMAZIONI DI COORDINATE ALL'INTERNO DI UN DATUM

Le *trasformazioni di coordinate* sono generalmente risolvibili in forma analitica chiusa, o comunque, con operazioni geometrico-matematiche ben definibili teoricamente che, nella maggior parte dei casi, non comportano in pratica alcuna perdita di precisione dei dati originari, se non per gli arrotondamenti di calcolo.

Assegnato un ellissoide di riferimento (datum) e considerata una terna cartesiana ortogonale con centro coincidente nel centro dell'ellissoide (fig. 8.19), si può definire la trasformazione tra coordinate geografiche e coordinate cartesiane e viceversa.

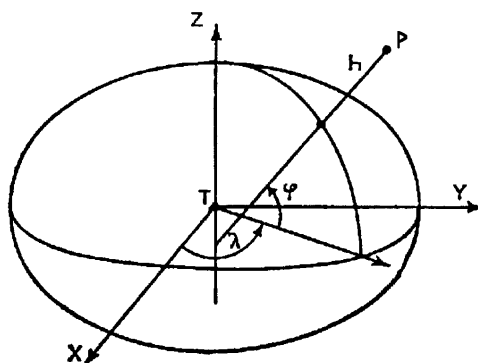


Figura 8.19 – Posizione di un punto rispetto all'ellissoide di riferimento in coordinate geocentriche cartesiane e geografiche ellissoidiche

### 8.5.1 Trasformazione di coordinate geografiche in coordinate cartesiane

Per eseguire detta trasformazione basta risolvere le già note equazioni:

$$\begin{cases} x = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\ y = (N + h) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\ z = \left[ N \cdot (1 - e^2) + h \right] \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad (8.1)$$

dove:

$\varphi$  e  $\lambda$  sono rispettivamente, la latitudine e la longitudine ellissoidiche del punto;

$h$  è la quota ellissoidica del punto;

$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}}$  è la Gran Normale;

$a, e^2$  sono i parametri geometrici dell'ellissoide.

### 8.5.2 Trasformazione di coordinate cartesiane in coordinate geografiche

Un'ulteriore trasformazione di coordinate è quella da coordinate cartesiane a coordinate geografiche per un determinato datum.

Per risalire alle coordinate geografiche, di un punto noto, dalle coordinate cartesiane, è necessario invertire il sistema (8.1). Il problema dell'inversione non è immediato ed il procedimento che in genere è utilizzato, in quanto preciso e veloce, è quello di Bencini descritto di seguito.

Noti i parametri ellissoidici  $a$  ed  $e^2$  si eseguono i seguenti passaggi:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (8.2)$$

è la distanza dell'asse polare;

$$\mathcal{G}_0 = \arctan \frac{Z}{R \cdot \sqrt{1 - e^2}} \quad (8.3)$$

è il valore di prima approssimazione della latitudine ridotta;

$$\delta \cdot \mathcal{G} = \frac{Z / a \cdot \sqrt{1 - e^2} + e^2 \cdot \sin \mathcal{G}_0 - R / a \cdot \tan \mathcal{G}_0}{R / a \cdot (1 + \tan^2 \mathcal{G}_0) - e^2 \cdot \cos \mathcal{G}_0} \quad (8.4)$$

è la correzione da apportare al valore  $\mathcal{G}_0$ ;

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \mathcal{G} \cdot \delta \quad (8.5)$$

è il valore corretto di seconda approssimazione della latitudine ridotta.

Il procedimento è iterativo e termina quando il valore di  $\mathcal{G}$  si stabilizza; la convergenza è in genere rapidissima e, già dopo la prima iterazione, l'approssimazione raggiunta è sufficiente per la maggior parte delle applicazioni.

Determinato  $\mathcal{G}$ , si calcolano le coordinate ellissoidiche:

$$\lambda = \arctan \frac{Y}{X} \quad (8.6)$$

$$\varphi = \arctan \frac{\tan \mathcal{G}}{\sqrt{1-e^2}} \quad (8.7)$$

$$h = \frac{Z}{\text{sen} \varphi} - N \cdot (1 - e^2) \quad (8.8)$$

### 8.5.3 Da cartesiane geocentriche a cartesiane locali (terna euleriana) e viceversa

- Trasformazione diretta (da geocentriche a locali)

È una trasformazione che riguarda coordinate tridimensionali, interessando planimetria ed altimetria.

Sia  $P_0$  un punto di coordinate geocentriche note  $(X_0, Y_0, Z_0)$ , origine della terna euleriana, e  $P$  un punto generico, di coordinate geocentriche  $(X, Y, Z)$ . Si calcolano dapprima le differenze di coordinate tra  $P$  e  $P_0$ , cioè le componenti del vettore baseline  $P-P_0$ :

$$\begin{cases} \Delta X = X - X_0 \\ \Delta Y = Y - Y_0 \\ \Delta Z = Z - Z_0 \end{cases} \quad (8.9)$$

Le coordinate  $(e, n, h)$  di  $P$  si ottengono mediante le formule di rotazione tra i due sistemi:

$$\begin{bmatrix} e \\ n \\ h \end{bmatrix} = R(\varphi, \omega) \cdot \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

dove  $R(\varphi, \omega)$  è la matrice di rotazione data da:

$$R(\varphi, \omega) = \begin{bmatrix} -\text{sen} \omega & \cos \omega & 0 \\ -\text{sen} \varphi \cos \omega & -\text{sen} \varphi \text{sen} \omega & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \omega & \cos \varphi \text{sen} \omega & \text{sen} \varphi \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

calcolata per le coordinate geografiche di  $P_0$ , ottenibili dalle geocentriche mediante le formule di Bowring.

- Trasformazione inversa (da locali a geocentriche)

Si ottiene facilmente invertendo le (8.10), ovvero:

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = R^{-1}(\varphi, \omega) \begin{bmatrix} e \\ n \\ h \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

la matrice inversa  $R^{-1}(\varphi, \omega)$  risulta uguale alla trasposta:

$$R^{-1}(\varphi, \omega) = R^T(\varphi, \omega) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \omega & -\operatorname{sen} \varphi \cos \omega & \cos \varphi \cos \omega \\ \cos \omega & -\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \omega & \cos \varphi \operatorname{sen} \omega \\ 0 & \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi \end{bmatrix}$$

e le coordinate geografiche sono sempre quelle dell'origine  $P_0$ .

Le coordinate geocentriche di  $P$  si ottengono, infine, da:

$$\begin{cases} X = X_0 + \Delta X \\ Y = Y_0 + \Delta Y \\ Z = Z_0 + \Delta Z \end{cases} \quad (8.13)$$

## 8.6 TRASFORMAZIONI DI DATUM GEODETICO

Si tratta, in questo caso, di passare da un sistema di riferimento geodetico ad un altro. Le trasformazioni di *datum*, essendo i datum “realizzati” da reti geodetiche affette da errori, si basano necessariamente sull'utilizzo di parametri, determinati statisticamente in base alla conoscenza delle coordinate in entrambi i datum, per un certo numero di punti chiamati *punti doppi*. Considerando un numero di punti doppi superiore a quelli strettamente necessari, questo tipo di trasformazione comporta, quasi sempre, iperdeterminazioni di uno o più ordini di grandezza.

Solitamente, si passa da coordinate geografiche a geocentriche all'interno di un *datum* di partenza, quindi alla trasformazione da geocentriche del *datum* di partenza a quelle nel *datum* di arrivo ed, infine, si passa da geocentriche a geografiche nel *datum* di arrivo.

### 8.6.1 La trasformazione tra coordinate geocentriche

Il passaggio tra coordinate geocentriche di un sistema ad un altro può avvenire mediante una soluzione a 6, 7 o 9 parametri.

La soluzione a sei parametri assume che i sistemi siano nella stessa scala, quella a sette considera un unico fattore di scala costante per i tre assi,

quella a nove parametri, invece, considera un differente fattore di scala per ogni asse cartesiano. La trattazione matematica è identica, pertanto, di seguito, si riporta solo quella a sette parametri (fig. 8.20).

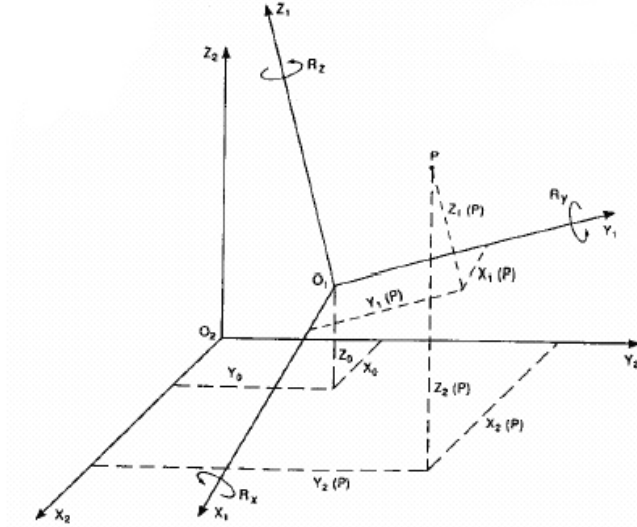


Figura 8.20 – Rototraslazione tra sistemi di riferimento a sette parametri

Con riferimento alla figura 8.zzz si osserva che, se sono note le coordinate di un generico punto  $P$  nel sistema di riferimento  $(O_1; X_1, Y_1, Z_1)$ , si possono determinare le coordinate del medesimo punto in un altro sistema di riferimento cartesiano  $(O_2; X_2, Y_2, Z_2)$ , con una relazione del tipo:

$$X_2 = X_0 + (1+k) R X_1 \quad (8.14)$$

in cui:

$$X_0 = \begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{vmatrix} \text{ è il vettore delle componenti di traslazione;}$$

$$X_1 = \begin{vmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{vmatrix} \text{ è il vettore delle coordinate note del punto nel sistema}$$

cartesiano  $(O_1; X_1, Y_1, Z_1)$ ;



$$X_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} \text{ è il vettore delle coordinate incognite del punto nel sistema}$$

cartesiano  $(O_2; X_2, Y_2, Z_2)$ ;

ed infine,

$$R = \begin{pmatrix} \cos R_y \cos R_z & \cos R_x \operatorname{sen} R_z + \operatorname{sen} R_z \operatorname{sen} R_y \cos R_z & \operatorname{sen} R_x \operatorname{sen} R_z - \cos R_x \operatorname{sen} R_y \cos R_z \\ -\cos R_y \operatorname{sen} R_z & \cos R_x \cos R_z - \operatorname{sen} R_x \operatorname{sen} R_y \operatorname{sen} R_z & \operatorname{sen} R_x \cos R_z + \cos R_x \operatorname{sen} R_y \operatorname{sen} R_z \\ \operatorname{sen} R_y & -\operatorname{sen} R_x \cos R_y & \cos R_x \operatorname{co} R_y \end{pmatrix}$$

è la matrice di rotazione che si ottiene facendo ruotare la terna cartesiana con pedice 1 attorno ai propri assi  $x_1, y_1, z_1$  (in quest'ordine) con rotazione pari, rispettivamente, a  $R_x, R_y, R_z$  per disporre gli assi parallelamente a quelli della terna cartesiana con pedice 2.

Si analizzano di seguito separatamente le tre rotazioni, per poi combinarle al fine di ottenere il risultato complessivo.

Per convenzione, si assumono con segno positivo gli angoli di rotazione in senso antiorario.

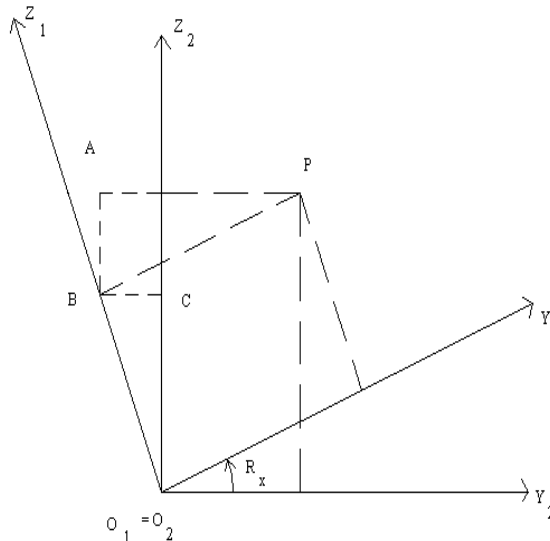


Figura 8.21 – Rotazione attorno all'asse X

Rotazione attorno all'asse X ( $R_x$ ) (fig. 8.21)

Con riferimento alla figura 8.21, per trasformare le coordinate del punto P, dal sistema di riferimento  $(O_1; X_1, Y_1, Z_1)$  al sistema di riferimento  $(O_2;$

$X_2, Y_2, Z_2$ ), si dovrà ruotare la terna con pedice 1 di un angolo pari ad  $R_x$  in senso antiorario.

Sapendo che:

$$y_1 = \overline{AP} - \overline{BC}$$

$$z_1 = \overline{OC} + \overline{AB}$$

si ottiene:

$$y_2 = y_1 \cdot \cos R_x + z_1 \cdot \text{sen}R_x \quad (8.15)$$

$$z_2 = -y_1 \text{sen}R_x + z_1 \cos R_x$$

Pertanto, la matrice di rotazione attorno ad  $X$  è:

$$R_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos R_x & \text{sen}R_x \\ 0 & -\text{sen}R_x & \cos R_x \end{vmatrix} \quad (8.16)$$

Rotazione attorno all'asse  $Y$  ( $R_y$ ) (fig. 8.22)

Analogamente a quanto visto prima, si ottiene:

$$x_2 = \overline{PA} + \overline{BC}$$

$$z_2 = \overline{OC} - \overline{AB}$$

ossia:

$$x_2 = x_1 \cdot \cos R_y - z_1 \cdot \text{sen}R_y \quad (8.17)$$

$$z_2 = z_1 \cdot \cos R_y + x_1 \cdot \text{sen}R_y$$

dalle quali è immediato ricavare la matrice di rotazione attorno ad  $Y$ :

$$R_y = \begin{vmatrix} \cos R_y & 0 & -\text{sen}R_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}R_y & 0 & \cos R_y \end{vmatrix} \quad (8.18)$$

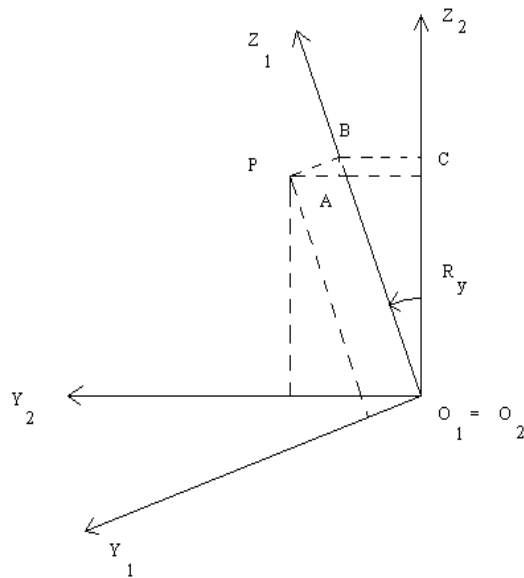


Figura 8.22 – Rotazione attorno all'asse Y

Rotazione attorno all'asse Z ( $R_z$ ) (fig. 8.23)

Con riferimento alla figura 8.vv, si ha:

$$x_2 = \overline{OA} + \overline{BC}$$

$$y_2 = \overline{CP} - \overline{OD}$$

quindi:

$$x_2 = x_1 \cdot \cos R_z + y_1 \cdot \sin R_z \quad (8.19)$$

$$y_2 = y_1 \cdot \cos R_z - x_1 \cdot \sin R_z$$

Da queste relazioni è immediato ricavare la matrice di rotazione attorno all'asse Z:

$$R_z = \begin{vmatrix} \cos R_z & \sin R_z & 0 \\ -\sin R_z & \cos R_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (8.20)$$

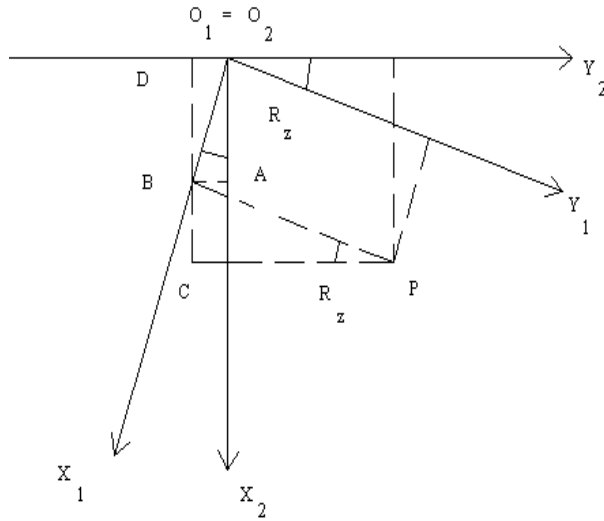


Figura 8.23 – Rotazione attorno all'asse Z

Il prodotto righe per colonne delle tre matrici di rotazione fornisce la matrice  $R$  complessiva: (8.21)

$$R = R_z \cdot R_y \cdot R_x = \begin{vmatrix} \cos R_y \cos R_z & \cos R_x \sin R_z + \sin R_z \sin R_y \cos R_z & \sin R_x \sin R_z - \cos R_x \sin R_y \cos R_z \\ -\cos R_y \sin R_z & \cos R_x \cos R_z - \sin R_x \sin R_y \sin R_z & \sin R_x \cos R_z + \cos R_x \sin R_y \sin R_z \\ \sin R_y & -\sin R_x \cos R_y & \cos R_x \cos R_y \end{vmatrix}$$

### 8.6.1.1 Stima ai minimi quadrati dei 7 parametri di trasformazione

Note le coordinate cartesiane di almeno tre punti, *punti doppi*, in entrambi i sistemi di riferimento, il sistema di equazione della trasformazione può essere risolto, consentendo la determinazione dei sette parametri incogniti ( $X_0, Y_0, Z_0, R_x, R_y, R_z, k$ ).

Generalmente, il sistema è risolto con il *metodo dei minimi quadrati*, dopo averne linearizzato le equazioni.

Per piccole rotazioni, e trascurando i termini del secondo ordine, la matrice  $R$  linearizzata assume la seguente forma:

$$R_L = \begin{vmatrix} 1 & R_z & -R_y \\ -R_z & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{vmatrix} \quad (8.22)$$

Per linearizzare la matrice delle rotazioni, quando è presente il fattore di scala, si trascurano i termini  $k \cdot R_x$ ,  $k \cdot R_y$ ,  $k \cdot R_z$  in quanto quantità infinitesime del secondo ordine nell'ipotesi che  $k$  sia una quantità piccola. La matrice  $R$  assume, in tal caso, la forma:

$$R_k = \begin{vmatrix} (1+k) & R_z & -R_y \\ -R_z & (1+k) & R_x \\ R_y & -R_x & (1+k) \end{vmatrix} \quad (8.23)$$

nei punti doppi sono noti i vettori

$$X_1 = \begin{vmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{vmatrix} \text{ e } X_2 = \begin{vmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{vmatrix} \quad (8.24)$$

Disponendo di  $n$  punti doppi si possono scrivere  $3n$  equazioni; tre per ogni punto del tipo:

$$\begin{cases} X_0 - Z_1 \cdot R_y + Y_1 \cdot R_z + X_1 \cdot k + (X_1 - X_2) = v_x \\ Y_0 + Z_1 \cdot R_x - X_1 \cdot R_z + Y_1 \cdot k + (Y_1 - Y_2) = v_y \\ Z_0 - Y_1 \cdot R_x + X_1 \cdot R_y + Z_1 \cdot k + (Z_1 - Z_2) = v_z \end{cases} \quad (8.25)$$

Tale sistema, scritto in forma matriciale, diventa:

$$A \cdot x + L = v \quad (8.26)$$

in cui:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_1 & Y_1 & X_1 \\ 0 & 1 & 0 & Z_1 & 0 & -X_1 & Y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -Y_1 & X_1 & 0 & Z_1 \end{vmatrix} \text{ è la matrice dei coefficienti delle}$$

incognite;

$$x = \begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ R_x \\ R_y \\ R_z \\ k \end{vmatrix} \text{ è il vettore dei parametri incogniti;}$$

$$L = \begin{pmatrix} X_1 - X_2 \\ Y_1 - Y_2 \\ Z_1 - Z_2 \end{pmatrix} \text{ è il vettore di termini noti;}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \text{ è il vettore dei residui.}$$

Applicando il metodo dei minimi quadrati, la stima dei parametri si ottiene risolvendo il sistema, *sistema normale*, in sette equazioni e sette incognite:

$$(A^T \cdot P \cdot A) \cdot x + (A^T \cdot P \cdot L) = 0 \quad (8.27)$$

dove  $P$  è la matrice diagonale dei pesi relativi ai punti doppi considerati. La soluzione del sistema normale è la seguente:

$$x = -(A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot (A^T \cdot P \cdot L) \quad (8.28)$$

Possiamo, inoltre, stimare le varianze di ciascuna variabile; si può dimostrare, infatti, che tali valori sono proporzionali agli elementi  $h_{ij}$

diagonali della matrice  $H = (A^T \cdot P \cdot A)^{-1}$ .

Si può scrivere:

$$\sigma_{x1}^2 = \sigma_0^2 \cdot h_{ii} \quad (8.29)$$

dove, la costante di proporzionalità, è esprimibile come

$$\sigma_0^2 = \frac{v^T P v}{3n - 7}. \quad (8.30)$$

I termini fuori diagonale della matrice consentono di stimare le covarianze e, quindi, le correlazioni tra i parametri. Se tali correlazioni risultassero “forti” la trasformazione di *datum* sarebbe poco significativa dal punto di vista fisico, in quanto i parametri stimati andrebbero a modellare le distorsioni della rete, più che la rototraslazione geometrica tra i due sistemi.

Una variante della *trasformazione di Helmert* (a sette parametri) consiste nell'utilizzare le *formule di MOLODENSKY* che, concettualmente, si basano sempre sulla rototraslazione a sette parametri (in forma linearizzata), ma sono scritte in coordinate geografiche e realizzano, quindi, il passaggio in modo più immediato (8.31).

$$d\varphi = \frac{\sin\omega}{(N+H)\cos\varphi} dx_0 - \frac{\cos\omega}{(N+H)\cos\varphi} dy_0 + \\ - \frac{(1-\alpha)^2 N+H}{N+H} \operatorname{tg}\varphi (\cos\omega dR_x + \sin\omega dR_y) + dR_z$$

$$\begin{aligned}
 d\omega = & \frac{\text{sen}\varphi \cos\omega}{\rho+H} dx_0 + \frac{\text{sen}\varphi \text{sen}\omega}{\rho+H} dy_0 - \frac{\cos\varphi}{\rho+H} \\
 & + \frac{\alpha^2/N+H}{N+H} (\text{sen}\omega dR_x + \cos\omega dR_y) + \frac{[1-(1-\alpha)^2]N}{\rho+H} \cos\varphi \text{sen}\varphi dk + \\
 & + \frac{\cos\varphi \text{sen}\varphi}{\rho+H} \left\{ [1-(1-\alpha)^2]N \frac{da}{a} + [\rho+(1-\alpha)^2N] \frac{d\alpha}{1-\alpha} \right\} \quad (8.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dH = & \cos\varphi \cos\omega dx_0 - \cos\varphi \text{sen}\omega dy_0 - \text{sen}\varphi dz_0 + \\
 & + [1-(1-\alpha)^2]N \cos\varphi \text{sen}\varphi (\text{sen}\omega dR_x - \cos\omega dR_y) - \left( \frac{a^2}{N+H} \right) dk - \frac{a}{N} + \\
 & - da + (1-\alpha)^2 N \text{sen}^2\varphi \frac{d\alpha}{1-\alpha}
 \end{aligned}$$

In tali espressioni  $dx_0$ ,  $dy_0$ ,  $dz_0$ ,  $dR_x$ ,  $dR_y$ ,  $dR_z$ ,  $dk$  rappresentano i sette parametri di trasformazione ( $d$  indica che, in questo caso, si tratta di valori elementari in quanto le formule di Molodensky derivano da una linearizzazione del modello),  $d\alpha$  e  $da$  sono le differenze, rispettivamente, tra gli schiacciamenti ed i semiassi dei due ellissoidi, mentre  $d\varphi$ ,  $d\omega$ ,  $dH$  sono gli incrementi da sommare alle coordinate ( $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $H$ ) di un punto nel primo sistema per riferirlo al secondo.

Poiché ciascuna quantità  $d\varphi$ ,  $d\omega$ ,  $dH$  compare in una singola equazione, è possibile utilizzare i dati planimetrici separatamente da quelli altimetrici, il che è utile, ad esempio, quando, per alcuni dei vertici di inquadramento, non risulta attendibile il valore della quota ellissoidica; in tal caso essi potranno ugualmente concorrere alla stima dei parametri con le prime due equazioni.

Il maggior vantaggio delle espressioni di Molodensky sta, quindi, nel poter utilizzare, ai fini del calcolo dei sette parametri, anche punti noti solo in planimetria (ad es. vertici di rete catastale) o solo in quota (ad es. capisaldi di livellazione).

È possibile, tuttavia, effettuare la trasformazione di coordinate geografiche anche attraverso le *formule di Molodensky abbreviate*, ottenendo precisioni di circa  $0'', 1 \cong (3 \text{ m})$ .

Noti i parametri di trasformazione  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ , in metri, riportati in tabella 8.2, indicando con pedice 1 il sistema di riferimento di partenza e con pedice 2 il sistema in cui si vogliono trasformare le coordinate, le formule di trasformazione sono espresse in radianti (8.32):

Tabella 8.2 – Parametri di trasformazione di Molodensky

Trasformazione da/a	$\Delta x$ (m)	$\Delta y$ (m)	$\Delta z$ (m)
WGS84/ED50	87	98	121
ED50/WGS84	87	- 98	- 121
WGS84/ROMA40	49,23	8,33	- 62,54
ROMA40/WGS84	49,23	- 8,33	62,54

$$\begin{cases} \varphi_2 = \varphi_1 - [\Delta x \cdot \text{sen}\varphi_1 \cdot \text{cos}\lambda_1 + \Delta y \cdot \text{sen}\varphi_1 \cdot \text{sen}\lambda_1 - \Delta z \cdot \text{cos}\varphi_1 + \\ \quad - \Delta s \cdot \text{sen}\varphi_1 \cdot \text{cos}\varphi_1] \cdot (1 + e_1^2 - 3 \cdot \eta^2) \cdot (1/a_1) \\ \lambda_2 = \lambda_1 - [(\Delta x \cdot \text{sen}\lambda_1 \cdot \text{cos}\lambda_1) \cdot (1 - \eta^2) \cdot \text{sen}\varphi_1] \cdot (1/a_1) \end{cases} \quad (8.32)$$

con:

$$\Delta s = a_2 \cdot (e_2^2 - e_1^2) + e_2^2 \cdot (a_2 - a_1)$$

$$\eta^2 = \frac{e_1^2}{2} \cdot \text{sen}^2\varphi_1$$

In cui  $(a_1, e_1^2)$  sono i parametri geometrici dell'ellissoide di partenza, mentre  $(a_2, e_2^2)$  quelli dell'ellissoide nel cui datum si vogliono trasformare le coordinate geografiche.